2018年初中数学联赛试题参考答案及评分标准

说明：评阅试卷时，请依据本评分标准.第一试，选择题和填空题只设7分和0分两档；第二试各题，请按照本评分标准规定的评分档次给分.如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，在评卷时请参照本评分标准划分的档次，给予相应的分数.

第一试(A)

一、选择题：（本题满分42分，每小题7分）

1． 设二次函数 $y=x^2+2ax+\frac{a^2}{2}$ 的图象的顶点为 A，与 x 轴的交点为 B,C.当△ABC 为等边三角形时，其边长为（　　）

A. $\sqrt{6}$.　　B. $2\sqrt{2}$.　　C. $2\sqrt{3}$.　　D. $3\sqrt{2}$.

【答】C.

由题设知 $A(-a,-\frac{a^2}{2})$. 设 $B(x_1,0)$，$C(x_2,0)$，二次函数的图象的对称轴与 x 轴的交点为 D，则

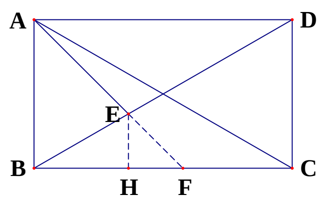
$$BC=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{4a^2-4\times\frac{a^2}{2}}=\sqrt{2a^2}.$$

又 $AD=\frac{\sqrt{3}}{2}BC$，则 $|-\frac{a^2}{2}|=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{2a^2}$，解得 $a^2=6$ 或 $a^2=0$（舍去）.

所以，△ABC 的边长 $BC=\sqrt{2a^2}=2\sqrt{3}$.

2． 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$\angle BAD$ 的平分线交 BD 于点 E，$AB=1$，$\angle CAE=15°$，则 $BE=$（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.　　C. $\sqrt{2}-1$.　　D. $\sqrt{3}-1$.



【答】D.

延长 AE 交 BC 于点 F，过点 E 作 BC 的垂线，垂足为 H.

由已知得 $\angle BAF=\angle FAD=\angle AFB=\angle HEF=45°$，$BF=AB=1$，$\angle EBH=\angle ACB=30°$.

设 $BE=x$，则 $HF=HE=\frac{x}{2}$，$BH=\frac{\sqrt{3}x}{2}$.

因为 $BF=BH+HF$，所以 $1=\frac{\sqrt{3}x}{2}+\frac{x}{2}$，解得 $x=\sqrt{3}-1$. 所以 $BE=\sqrt{3}-1$.

3． 设 p,q 均为大于3的素数，则使 $p^2+5pq+4q^2$ 为完全平方数的素数对 (p,q) 的个数为（　　）

A. 1.　　B. 2.　　C. 3.　　D. 4.

【答】B.

设 $p^2+5pq+4q^2=m^2$（m 为自然数），则 $(p+2q)^2+pq=m^2$，即

$(m-p-2q)(m+p+2q)=pq$.

由于 p,q 为素数，且 $m+p+2q>p, m+p+2q>q$，所以 $m-p-2q=1$，$m+p+2q=pq$，从而 $pq-2p-4q-1=0$，即 $(p-4)(q-2)=9$，所以 $(p,q)=(5,11)$ 或 $(7,5)$.

所以，满足条件的素数对 (p,q) 的个数为 2.

4．若实数 a,b 满足 $a-b=2$，$\dfrac{(1-a)^2}{b}-\dfrac{(1+b)^2}{a}=4$，则 $a^5-b^5=$ （　　）

A. 46.　　B. 64.　　C. 82.　　D. 128.

【答】C.

由条件 $\dfrac{(1-a)^2}{b}-\dfrac{(1+b)^2}{a}=4$ 得 $a-b-2a^2-2b^2-4ab+a^3-b^3=0$，

即 $(a-b)-2[(a-b)^2+4ab]+(a-b)[(a-b)^2+3ab]=0$，

又 $a-b=2$，所以 $2-2[4+4ab]+2[4+3ab]=0$，解得 $ab=1$.所以 $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=6$，$a^3-b^3=(a-b)[(a-b)^2+3ab]=14$，$a^5-b^5=(a^2+b^2)(a^3-b^3)-a^2b^2(a-b)=82$.

5．对任意的整数 x,y，定义 $x@y=x+y-xy$，则使得 $(x@y)@z+(y@z)@x+(z@x)@y=0$ 的整数组 (x,y,z) 的个数为 （　　）

A. 1.　　B. 2.　　C. 3.　　D. 4.

【答】D.

$(x@y)@z=(x+y-xy)@z=(x+y-xy)+z-(x+y-xy)z=x+y+z-xy-yz-zx+xyz$，

由对称性，同样可得

$(y@z)@x=x+y+z-xy-yz-zx+xyz$，$(z@x)@y=x+y+z-xy-yz-zx+xyz$.

所以，由已知可得 $x+y+z-xy-yz-zx+xyz=0$，即 $(x-1)(y-1)(z-1)=-1$.

所以，x,y,z 为整数时，只能有以下几种情况：

$$\begin{cases}x-1=1,\\y-1=1,\\z-1=-1,\end{cases}\text{或}\begin{cases}x-1=1,\\y-1=-1,\\z-1=1,\end{cases}\text{或}\begin{cases}x-1=-1,\\y-1=1,\\z-1=1,\end{cases}\text{或}\begin{cases}x-1=-1,\\y-1=-1,\\z-1=-1,\end{cases}$$

所以，$(x,y,z)=(2,2,0)$ 或 $(2,0,2)$ 或 $(0,2,2)$ 或 $(0,0,0)$，故共有 4 个符合要求的整数组.

6. 设 $M=\frac{1}{2018}+\frac{1}{2019}+\frac{1}{2020}+\cdots+\frac{1}{2050}$，则 $\frac{1}{M}$ 的整数部分是 （　　）

A. 60.　　B. 61.　　C. 62.　　D. 63.

【答】B.

因为 $M<\frac{1}{2018}\times 33$，所以 $\frac{1}{M}>\frac{2018}{33}=61\frac{5}{33}$.

又 $M=(\frac{1}{2018}+\frac{1}{2019}+\cdots+\frac{1}{2030})+(\frac{1}{2031}+\frac{1}{2032}+\cdots+\frac{1}{2050})$

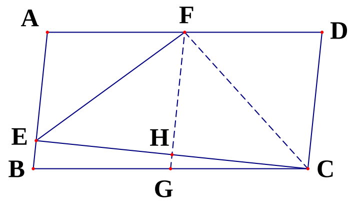
$>\frac{1}{2030}\times 13+\frac{1}{2050}\times 20=\frac{1345}{83230}$，

所以 $\frac{1}{M}<\frac{83230}{1345}=61\frac{1185}{1345}$，故 $\frac{1}{M}$ 的整数部分为 61.

二、填空题：（本题满分 28 分，每小题 7 分）

1. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$BC=2AB$，$CE\perp AB$ 于 E，F 为 AD 的中点，若 $\angle AEF=48^\circ$，则 $\angle B=$_______.

【答】84°.



设 BC 的中点为 G，连结 FG 交 CE 于 H，由题设条件知 $FGCD$ 为菱形.

由 $AB//FG//DC$ 及 F 为 AD 的中点，知 H 为 CE 的中点.

又 $CE\perp AB$，所以 $CE\perp FG$，所以 FH 垂直平分 CE，故

$\angle DFC=\angle GFC=\angle EFG=\angle AEF=48^\circ$.

所以 $\angle B=\angle FGC=180^\circ-2\times 48^\circ=84^\circ$.

2. 若实数 x,y 满足 $x^3+y^3+\frac{1}{4}(x+y)=\frac{15}{2}$，则 $x+y$ 的最大值为_______.

【答】3.

由 $x^3+y^3+\frac{1}{4}(x+y)=\frac{15}{2}$ 可得 $(x+y)(x^2-xy+y^2)+\frac{1}{4}(x+y)=\frac{15}{2}$，即

$$(x+y)(x^2-xy+y^2+\frac{1}{4})=\frac{15}{2}. \qquad ①$$

令 $x+y=k$，注意到 $x^2-xy+y^2+\frac{1}{4}=(x-\frac{y}{2})^2+\frac{3}{4}y^2+\frac{1}{4}>0$，故 $x+y=k>0$.

又因为 $x^2-xy+y^2+\frac{1}{4}=(x+y)^2-3xy+\frac{1}{4}$，故由①式可得 $k^3-3xyk+\frac{1}{4}k=\frac{15}{2}$，所以

$$xy=\frac{k^3+\frac{1}{4}k-\frac{15}{2}}{3k}.$$

于是，x,y 可看作关于 t 的一元二次方程 $t^2-kt+\frac{k^3+\frac{1}{4}k-\frac{15}{2}}{3k}=0$ 的两根，所以

$$\Delta=(-k)^2-4\cdot\frac{k^3+\frac{1}{4}k-\frac{15}{2}}{3k}\ge 0,$$

化简得 $k^3+k-30\le 0$，即 $(k-3)(k^2+3k+10)\le 0$，所以 $0<k\le 3$.

故 $x+y$ 的最大值为 3.

3．没有重复数字且不为 5 的倍数的五位数的个数为________.

【答】21504.

显然首位数字不能为 0，末位不能为 0 和 5.

当首位数字不为 5 时，则首位只能选 0,5 之外的 8 个数.相应地个位数只能选除 0,5 及万位数之外的 7 个数，千位上只能选万位和个位之外的 8 个数，百位上只能选剩下的 7 个数，十位上只能选剩下的 6 个数.所以，此时满足条件的五位数的个数为$8\times7\times8\times7\times6=18816$个.

当首位数字为 5 时，则个位有 8 个数可选，依次千位有 8 个数可选，百位有 7 个数可选, 十位有 6 个数可选.所以，此时满足条件的五位数的个数为$8\times8\times7\times6=2688$个.

所以，满足条件的五位数的个数为$18816+2688=21504$（个）.

4．已知实数a,b,c满足$a+b+c=0$，$a^2+b^2+c^2=1$，则$\dfrac{a^5+b^5+c^5}{abc}=$________.

【答】$\dfrac{5}{2}$.

由已知条件可得$ab+bc+ca=\dfrac{1}{2}[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)]=-\dfrac{1}{2}$，$a^3+b^3+c^3=3abc$，所以

$$a^5+b^5+c^5=(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)-[a^2(b^3+c^3)+b^2(a^3+c^3)+c^2(a^3+b^3)]$$

$$=3abc-[a^2b^2(a+b)+a^2c^2(a+c)+b^2c^2(b+c)]=3abc+(a^2b^2c+a^2c^2b+b^2c^2a)$$

$$=3abc+abc(ab+bc+ca)=3abc-\frac{1}{2}abc=\frac{5}{2}abc.$$

所以 $\dfrac{a^5+b^5+c^5}{abc}=\dfrac{5}{2}$.

第一试(B)

一、选择题：（本题满分 42 分，每小题 7 分）

1．满足$(x^2+x-1)^{x+2}=1$的整数x的个数为（　　）

A. 1.　　B. 2.　　C. 3.　　D. 4.

【答】C.

当$x+2=0$且$x^2+x-1\neq0$时，$x=-2$.

当$x^2+x-1=1$时，$x=-2$或$x=1$.

当$x^2+x-1=-1$且$x+2$为偶数时，$x=0$.

所以，满足条件的整数x有 3 个.

2．已知$x_1,x_2,x_3(x_1<x_2<x_3)$为关于x的方程$x^3-3x^2+(a+2)x-a=0$的三个实数根，则$4x_1-x_1^2+x_2^2+x_3^2=$（　　）

A. 5.　　B. 6.　　C. 7.　　D. 8.

【答】A.

方程即$(x-1)(x^2-2x+a)=0$，它的一个实数根为 1，另外两个实数根之和为 2，其中必有一根小于 1，另一根大于 1，于是$x_2=1, x_1+x_3=2$，故

$$4x_1-x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_3+x_1)(x_3-x_1)+4x_1+1=2(x_3-x_1)+4x_1+1=2(x_3+x_1)+1=5.$$

3．已知点E，F分别在正方形$ABCD$的边CD，AD上，$CD=4CE$，$\angle EFB=\angle FBC$，则$\tan\angle ABF=$　　　　　　　　　　　（　　）

A. $\frac{1}{2}$.　　　B. $\frac{3}{5}$.　　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.　　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

【答】B.

不妨设$CD=4$，则$CE=1, DE=3$. 设$DF=x$，则$AF=4-x$，$EF=\sqrt{x^2+9}$.

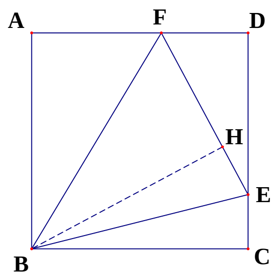
作$BH\perp EF$于点H. 因为$\angle EFB=\angle FBC=\angle AFB$，$\angle BAF=90^\circ=\angle BHF$，$BF$公共，所以$\triangle BAF\cong\triangle BHF$，所以$BH=BA=4$.

由$S_{四边形ABCD}=S_{\Delta ABF}+S_{\Delta BEF}+S_{\Delta DEF}+S_{\Delta BCE}$得

$$4^2=\frac{1}{2}\cdot4\cdot(4-x)+\frac{1}{2}\cdot4\cdot\sqrt{x^2+9}+\frac{1}{2}\cdot3\cdot x+\frac{1}{2}\cdot4\cdot1,$$

解得$x=\frac{8}{5}$.

所以$AF=4-x=\frac{12}{5}$，$\tan\angle ABF=\frac{AF}{AB}=\frac{3}{5}$.



4．方程$\sqrt{3+\sqrt{9+x}}=\sqrt[3]{x}$的实数根的个数为　　　　　　　　　　　（　　）

A. 0.　　　B. 1.　　　C. 2.　　　D. 3.

【答】B.

令$y=\sqrt{9+x}$，则$y\geq0$，且$x=y^2-9$，原方程变为$\sqrt{3+y}=\sqrt[3]{y^2-9}$，解得$y=1$或$y=6$，从而可得$x=-8$或$x=27$.

检验可知：$x=-8$是增根，舍去；$x=27$是原方程的实数根.

所以，原方程只有 1 个实数根.

5．设a,b,c为三个实数，它们中任何一个数加上其余两数之积的 2017 倍都等于 2018，则这样的三元数组(a,b,c)的个数为　　　　　　　　　　　（　　）

A. 4.　　　B. 5.　　　C. 6.　　　D. 7.

【答】B.

由已知得，$a+2017bc=2018$，$b+2017ac=2018$，$c+2017ab=2018$，两两作差，可得

$$(a-b)(1-2017c)=0，(b-c)(1-2017a)=0，(c-a)(1-2017b)=0.$$

由 $(a-b)(1-2017c)=0$，可得 $a=b$ 或 $c=\frac{1}{2017}$.

（1）当 $a=b=c$ 时，有 $2017a^2+a-2018=0$，解得 $a=1$ 或 $a=-\frac{2018}{2017}$.

（2）当 $a=b\neq c$ 时，解得 $a=b=\frac{1}{2017}$， $c=2018-\frac{1}{2017}$.

（3）当 $a\neq b$ 时，$c=\frac{1}{2017}$，此时有：$a=\frac{1}{2017},b=2018-\frac{1}{2017}$，或 $a=2018-\frac{1}{2017},b=\frac{1}{2017}$.

故这样的三元数组 (a,b,c) 共有 5 个.

6．已知实数 a,b 满足 $a^3-3a^2+5a=1$，$b^3-3b^2+5b=5$，则 $a+b=$ （ ）

A. 2.　　　B. 3.　　　C. 4.　　　D. 5.

【答】A.

有已知条件可得 $(a-1)^3+2(a-1)=-2$，$(b-1)^3+2(b-1)=2$，两式相加得

$(a-1)^3+2(a-1)+(b-1)^3+2(b-1)=0$，

因式分解得 $(a+b-2)[(a-1)^2-(a-1)(b-1)+(b-1)^2+2]=0$.

因为

$(a-1)^2-(a-1)(b-1)+(b-1)^2+2=[(a-1)-\frac{1}{2}(b-1)]^2+\frac{3}{4}(b-1)^2+2>0$，

所以 $a+b-2=0$，因此 $a+b=2$.

二、填空题：（本题满分 28 分，每小题 7 分）

1．已知 p,q,r 为素数，且 pqr 整除 $pq+qr+rp-1$，则 $p+q+r=$_______.

【答】10.

设 $k=\frac{pq+qr+rp-1}{pqr}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-\frac{1}{pqr}$，由题意知 k 是正整数，又 $p,q,r\geq 2$，所以 $k<\frac{3}{2}$，从而 $k=1$，即有 $pq+qr+rp-1=pqr$，于是可知 p,q,r 互不相等.

当 $2\leq p<q<r$ 时， $pqr=pq+qr+rp-1<3qr$，所以 $q<3$，故 $q=2$. 于是 $2qr=qr+2q+2r-1$，故 $(q-2)(r-2)=3$，所以 $q-2=1,r-2=3$，即 $q=3,r=5$，所以，$(p,q,r)=(2,3,5)$.

再由 p,q,r 的对称性知，所有可能的数组 (p,q,r) 共有 6 组，即 $(2,3,5)$，$(2,5,3)$，$(3,2,5)$，$(3,5,2)$，$(5,2,3)$，$(5,3,2)$.

于是 $p+q+r=10$.

2．已知两个正整数的和比它们的积小 1000，若其中较大的数是完全平方数，则较小的数为_______.

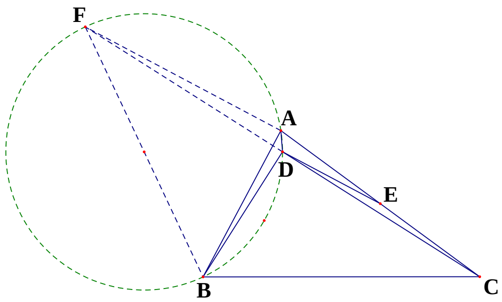
【答】8.

设这两个数为$m^2, n\ (m^2>n)$，则 $m^2+n=m^2n-1000$，即$(m^2-1)(n-1)=1001$.

又$1001=1001\times1=143\times7=91\times11=77\times13$，所以 $(m^2-1,n-1)=(1001,1)$或$(143,7)$或$(91,11)$或$(77,13)$，验证可知只有$(m^2-1,n-1)=(143,7)$满足条件，此时$m^2=144, n=8$.

3．已知 D 是△ ABC 内一点，E 是 AC 的中点，$AB=6$，$BC=10$，$\angle BAD=\angle BCD$，$\angle EDC=\angle ABD$，则$DE=$_______.

【答】4.



延长CD至F，使$DF=DC$，则$DE /\!/ AF$且$DE=\dfrac{1}{2}AF$，所以$\angle AFD=\angle EDC=\angle ABD$，故$A,F,B,D$四点共圆，于是$\angle BFD=\angle BAD=\angle BCD$，所以$BF=BC=10$，且$BD\perp FC$，故$\angle FAB=\angle FDB=90^\circ$.

又$AB=6$，故$AF=\sqrt{10^2-6^2}=8$，所以$DE=\dfrac{1}{2}AF=4$.

4．已知二次函数$y=x^2+2(m+2n+1)x+(m^2+4n^2+50)$的图象在$x$轴的上方，则满足条件的正整数对$(m,n)$的个数为_______.

【答】16.

因为二次函数的图象在x轴的上方，所以$\Delta=[2(m+2n+1)]^2-4(m^2+4n^2+50)<0$，整理得$4mn+2m+4n<49$，即$(m+1)(2n+1)<\dfrac{51}{2}$. 因为$m,n$为正整数，所以$(m+1)(2n+1)\le 25$.

又$m+1\ge 2$，所以$2n+1<\dfrac{25}{2}$，故$n\le 5$.

当$n=1$时，$m+1\le\dfrac{25}{3}$，故$m\le\dfrac{22}{3}$，符合条件的正整数对(m,n)有 8 个；

当$n=2$时，$m+1\le 5$，故$m\le 4$，符合条件的正整数对(m,n)有 4 个；

当$n=3$时，$m+1\le\dfrac{25}{7}$，故$m\le\dfrac{18}{7}$，符合条件的正整数对(m,n)有 2 个；

当$n=4$时，$m+1\le\dfrac{25}{9}$，故$m\le\dfrac{17}{9}$，符合条件的正整数对(m,n)有 1 个；

当$n=5$时，$m+1\le\dfrac{25}{11}$，故$m\le\dfrac{14}{11}$，符合条件的正整数对(m,n)有 1 个.

综合可知：符合条件的正整数对(m,n)有 8＋4＋2＋1＋1＝16 个.

第二试 （A）

一、(**本题满分 20 分**) 设 a,b,c,d 为四个不同的实数，若 a,b 为方程 $x^2-10cx-11d=0$ 的根，c,d 为方程 $x^2-10ax-11b=0$ 的根，求 $a+b+c+d$ 的值.

解 由韦达定理得 $a+b=10c$，$c+d=10a$，两式相加得 $a+b+c+d=10(a+c)$.

……………………5 分

因为 a 是方程 $x^2-10cx-11d=0$ 的根，所以 $a^2-10ac-11d=0$，又 $d=10a-c$，所以

$a^2-110a+11c-10ac=0$. ① **……………………10 分**

类似可得 $c^2-110c+11a-10ac=0$. ② **……………………15 分**

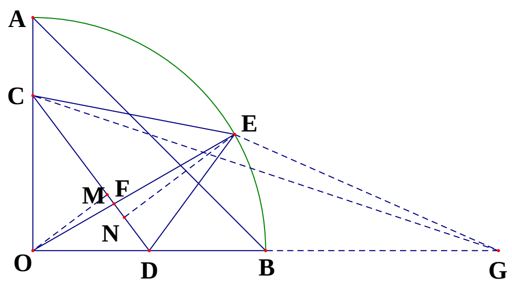
①－②得 $(a-c)(a+c-121)=0$.

因为 $a\neq c$，所以 $a+c=121$，所以 $a+b+c+d=10(a+c)=1210$. **……………………20 分**

二、(**本题满分 25 分**) 如图，在扇形 OAB 中，$\angle AOB=90°$，$OA=12$，点 C 在 OA 上，$AC=4$，点 D 为 OB 的中点，点 E 为弧 AB 上的动点，OE 与 CD 的交点为 F.

（1）当四边形 $ODEC$ 的面积 S 最大时，求 EF；

（2）求 $CE+2DE$ 的最小值.



解 (1)分别过 O,E 作 CD 的垂线，垂足为 M,N.

由 $OD=6,OC=8$，得 $CD=10$.所以

$$S=S_{\Delta OCD}+S_{\Delta ECD}=\frac{1}{2}CD\cdot(OM+EN)$$

$$\leq\frac{1}{2}CD\cdot OE=\frac{1}{2}\times10\times12=60,$$ **……………………5 分**

当 $OE\perp DC$ 时，S 取得最大值 60.

此时，$EF=OE-OF=12-\dfrac{6\times8}{10}=\dfrac{36}{5}$. **……………………10 分**

（2）延长 OB 至点 G，使 $BG=OB=12$，连结 GC,GE.

因为 $\dfrac{OD}{OE}=\dfrac{OE}{OG}=\dfrac{1}{2}$，$\angle DOE=\angle EOG$，所以△$ODE$∽△$OEG$，所以 $\dfrac{DE}{EG}=\dfrac{1}{2}$，故 $EG=2DE$.

……………………20 分

所以 $CE+2DE=CE+EG\geq CG=\sqrt{24^2+8^2}=8\sqrt{10}$，当 C,E,G 三点共线时等号成立.

故 $CE+2DE$ 的最小值为 $8\sqrt{10}$. **……………………25 分**

三、（**本题满分 25 分**）求所有的正整数m,n，使得$\dfrac{m^3+n^3-m^2n^2}{(m+n)^2}$是非负整数.

解　记$S=\dfrac{m^3+n^3-m^2n^2}{(m+n)^2}$，则

$$S=\frac{(m+n)[(m+n)^2-3mn]-m^2n^2}{(m+n)^2}=(m+n)-\frac{3mn}{m+n}-(\frac{mn}{m+n})^2.$$

因为m,n为正整数，故可令$\dfrac{mn}{m+n}=\dfrac{q}{p}$，$p,q$为正整数，且$(p,q)=1$.

于是 $S=(m+n)-\dfrac{3q}{p}-\dfrac{q^2}{p^2}=(m+n)-\dfrac{3pq+q^2}{p^2}$.

因为S为非负整数，所以$p\,|\,q^2$，又$(p,q)=1$，故$p=1$，即$(m+n)\,|\,mn$.　　①

……………………10 分

所以$\dfrac{n^2}{m+n}=n-\dfrac{mn}{m+n}$是整数，所以$(m+n)\,|\,n^2$，故$n^2\ge m+n$，即$n^2-m\ge n$.

又由$S\ge 0$，知$m^3+n^3-m^2n^2\ge 0$.　　②

所以$n^3\ge m^2n^2-m^3=m^2(n^2-m)\ge m^2n$，所以$n\ge m$.

由对称性，同理可得$m\ge n$，故$m=n$.　……………………20 分

把$m=n$代入①，得$2\,|\,m$，则$m\ge 2$.把$m=n$代入②，得$2m^3-m^4\ge 0$，即$m\le 2$.

故$m=2$.

所以，满足条件的正整数m,n为$m=2$，$n=2$.　……………………25 分

第二试　（B）

一、（**本题满分 20 分**）若实数a,b,c满足$(a+b+c)(\dfrac{1}{a+b-5c}+\dfrac{1}{b+c-5a}+\dfrac{1}{c+a-5b})=\dfrac{9}{5}$，求$(a+b+c)(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c})$的值.

解　记$a+b+c=x$，$ab+bc+ca=y$，$abc=z$，则

$$(a+b+c)(\frac{1}{a+b-5c}+\frac{1}{b+c-5a}+\frac{1}{c+a-5b})=x(\frac{1}{x-6a}+\frac{1}{x-6b}+\frac{1}{x-6c})$$

$$=\frac{x[3x^2-12(a+b+c)x+36(ab+bc+ca)]}{x^3-6(a+b+c)x^2+36(ab+bc+ca)x-216abc}=\frac{x(-9x^2+36y)}{-5x^3+36xy-216z},$$

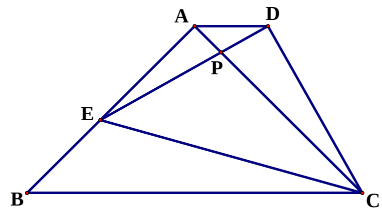
……………………10 分

结合已知条件可得 $\dfrac{x(-9x^2+36y)}{-5x^3+36xy-216z}=\dfrac{9}{5}$，整理得 $xy=\dfrac{27}{2}z$.所以

$(a+b+c)(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c})=\dfrac{xy}{z}=\dfrac{27}{2}$. ……………………**20 分**

二、（本题满分 25 分）如图，点 E 在四边形 $ABCD$ 的边 AB 上，$\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等腰直角三角形，$AB=AC$，$DE=DC$.

（1）证明：$AD//BC$；（2）设 AC 与 DE 交于点 P，如果 $\angle ACE=30°$，求 $\dfrac{DP}{PE}$.



解　（1）由题意知 $\angle ACB=\angle DCE=45°$，$BC=\sqrt{2}AC$，$EC=\sqrt{2}DC$，所以 $\angle DCA=\angle ECB$，$\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{DC}{EC}$，所以 $\triangle ADC \backsim \triangle BEC$，故 $\angle DAC=\angle EBC=45°$，所以 $\angle DAC=\angle ACB$，所以 $AD//BC$.

……………………**10 分**

（2）设 $AE=x$，因为 $\angle ACE=30°$，可得 $AC=\sqrt{3}x$，$CE=2x$，$DE=DC=\sqrt{2}x$.

因为 $\angle EAP=\angle CDP=90°$，$\angle EPA=\angle CPD$，所以 $\triangle APE \backsim \triangle DPC$，故可得 $S_{\Delta APE}=\dfrac{1}{2}S_{\Delta DPC}$.

……………………**15 分**

又 $S_{\Delta EPC}+S_{\Delta APE}=S_{\Delta ACE}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2$，$S_{\Delta EPC}+S_{\Delta DPC}=S_{\Delta CDE}=x^2$，于是可得

$S_{\Delta DPC}=(2-\sqrt{3})x^2$，$S_{\Delta EPC}=(\sqrt{3}-1)x^2$. ……………………**20 分**

所以 $\dfrac{DP}{PE}=\dfrac{S_{\Delta DPC}}{S_{\Delta EPC}}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. ……………………**25 分**

三、（本题满分 25 分）设 x 是一个四位数，x 的各位数字之和为 m，$x+1$ 的各位数字之和为 n，并且 m 与 n 的最大公约数是一个大于 2 的素数. 求 x.

解　设 $x=\overline{abcd}$，由题设知 m 与 n 的最大公约数 (m,n) 为大于 2 的素数.

若 $d\neq 9$，则 $n=m+1$，所以 $(m,n)=1$，矛盾，故 $d=9$. ……………………**5 分**

若 $c\neq 9$，则 $n=m+1-9=m-8$，故 $(m,n)=(m,8)$，它不可能是大于 2 的素数，矛盾，故 $c=9$.

……………………**10 分**

若 $b=9$，显然 $a\neq 9$，所以 $n=m+1-9-9-9=m-26$，故 $(m,n)=(m,26)=13$，但此时可得 $n\geq 13$，$m=n+26\geq 39>36$，矛盾. ……………………**15 分**

若 $b\neq 9$，则 $n=m+1-9-9=m-17$，故 $(m,n)=(m,17)=17$，只可能 $n=17,m=34$.

……………………**20 分**

于是可得 $x=8899$ 或 9799. ……………………**25 分**